Vektoren

kartesisches Koordinatensystem

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z$$

Einheitsvektoren:

$$\vec{e}_x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad \vec{e}_x=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad \vec{e}_x=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Betrag: $|\vec{a}|=a=\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}+a_z^{\,2}}$

$$|\vec{e}|=1\qquad \vec{e}_x\perp\vec{e}_y\quad \vec{e}_y\perp\vec{e}_z\quad \vec{e}_z\perp\vec{e}_x$$

Normalisierung von Vektoren

$$\vec{e}_a=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$$

$$|\vec{e}_a|=1$$

zeigt in Richtung von $\vec{a}$

Projektion von Vektoren

Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$

$$\vec{b}_{\vec{a}}=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}$$

Richtungswinkel

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

$$a_x=a\cdot\cos\alpha$$
$$a_y=a\cdot\cos\beta$$
$$a_z=a\cdot\cos\gamma$$

Skalarprodukt

$$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

$$\vec{a}\circ\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z y_z$$

$$a\perp b\ \Rightarrow\ \vec{a}\circ\vec{b}=0$$

$$\vec{a}\circ\vec{a}=|\vec{a}|^2\quad\Rightarrow\quad|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\circ\vec{a}}$$

$$\vec{a}\circ\vec{b}=\vec{b}\circ\vec{a}$$
$$\vec{a}\circ(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{a}\circ\vec{c}$$
$$\lambda\cdot(\vec{a}\circ\vec{b})=(\lambda\cdot\vec{a})\circ\vec{b}=\vec{a}\circ(\lambda\cdot\vec{b})$$

Winkel zwischen Vektoren

$$\varphi=\arccos\left(\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)$$

$$0°\le\varphi\le180°$$

Kreuzprodukt

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_y b_z-a_z b_y\\a_z b_x-a_x b_z\\a_x b_y-a_y b_x\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}\perp\vec{a},\quad\vec{c}\perp\vec{b}$$
$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})\ =\ \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}\ =\ -\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\ =\ \lambda\vec{a}\times\vec{b}\ =\ \vec{a}\times\lambda\vec{b}$$

Parallelogrammfläche

$\vec{a},\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm auf

$$A=|\vec{a}\times\vec{b}|$$

$$A=0\ \text{für}\ \varphi=0°,180°$$

Spatprodukt

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$=a_x\cdot(b_y c_c-c_y b_z)$$
$$+a_y\cdot(b_z c_x-b_x c_z)$$
$$+a_z\cdot(b_x c_y-b_y c_x)$$

zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}]=[\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}]$$

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=-[\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}]$$

Spatvolumen

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ spannen ein Parallelepiped auf

$$V=|[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]|$$